(2+1)次元時空におけるスピンと統計(ゲージ場のトポロジー,基研短期研究会「トポロジーの物理への応用」報告,研究会報告)

大貫, 義郎

anomalyと$2n$次元の場合のnon-Abelian anomalyの間の関係を見出すことができる。これら3種のanomalyは，実は唯一つの位相不変量（$2n+1$次元の空間からゲージ群への写像のwinding number）に関連づけられるのである。

・Fujikawa, Phys. Rev. **D21** (1980) 2848.

・Alvarez-Gaumé, Ginsparg, Nucl. Phys. **B243** (1984) 449.

・Alvarez-Gaumé, Dietra, Moore, Ann. Phys. **163** (1985) 288.

・炭谷俊樹，素粒子論研究 **71** (1985) 65.

(c) 空間がノン・コンパクトである場合には連続スペクトルが発生するので，(4)の$V(\beta)$がβに依存するようになる。(5)は$V(\infty)=V(0)+v$のように補正項vを必要とするようになる。物理的には$V(0)$はanomalyの積分に対応するがそれはもはやindex $V(\infty)$に等しくない。

同様のことは空間が境界をもつような場合にも起こる。$V(\infty)$を求めるには境界上に発生するモードも考慮しなければならず，それが補正項vを惹き起こす。当然のことながら，vの値は境界条件の取り方に依存する。2次元の電磁場とディラック場の系についての計算によると，物理的な境界条件を用いた場合には$V(\infty)=\mathrm{sgn}\,\Phi\cdot[|\Phi|]$，Atiyah-Patodi-Singerが採用した境界条件を用いた場合には$V(\infty)=[\Phi+\frac{1}{2}]$である。ここで$\Phi$は全磁束であり，$[a]$は$a$の整数部分である。いずれの場合も$\Phi$を連続的に変化させる時に，$V(\infty)$が階段状に変化することになる。

・Niemi, Semenoff, Nucl. Phys. **B269** (1986) 131.

・Forgacs et al., Nucl. Phys. **B293** (1987) 559.

以　上

(2＋1)次元時空におけるスピンと統計

名大・理　大　貫　義　郎

I

3次元空間の中で，ある与えられたスピンをもつ同種粒子の統計的な性質が下の表1のようになっていることはよく知られている。

表1.

スピン	整　数	半　整　数
統　計	ボーズ，パラボーズ	フェルミ，パラフェルミ

この性質は，問題とする同種粒子が，(i)基本的な粒子または場から構成されたものであろうが，[1)2)3)] あ

るいは，(ii)光子や電子のように相対論的な場の量子化の結果として与えられたものであろうが，[4)5)]ともに満されるべきことが，それぞれに対して証明されている。

ところが空間の次元が異なると，スピンと統計の関係もこれに応じて変ってくることが予想される。特に空間が２次元の場合は，２次元回転群が局所的にはU(1)と同等であるため，回転角をφとするとき，そのユニタリー表現$R(\varphi)$は

$$R(\varphi)\ R(\varphi') = R(\varphi+\varphi') \tag{1.1}$$

に従う。それゆえ，ユニタリーな既約表現は，任意に実数Sを与えると一意的に指定されて$R(\varphi)=\exp[iS\varphi/\hbar]$とかかれる。これは２次元空間では実数値Sのスピンをもつ粒子が存在する可能性を示唆するもので，$S\neq$整数，半整数のときはfractional angular momentumまたはfractional spinという言葉が使われ，[6)]実際にこのようなスピンをもつ粒子の模型がいろいろ考えられてきている。その最も簡単な例は次のようなものであろう[*)]。

粒子e，Φの座標を$\vec{r}$，$\vec{r}'$，正準運動量を$\vec{p}$，$\vec{p}'$質量をm，m′とし，それぞれがゲージ場の源となって，系のハミルトニアンが

$$H=\frac{1}{2m}\left[\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}-\vec{r}')\right]^2+\frac{1}{2m'}\left[\vec{p}'-\frac{\Phi}{c}\vec{A}'(\vec{r}'-\vec{r})\right]^2+V(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{1.2}$$

で与えられるとしよう。ここでゲージ場$\vec{A}$，$\vec{A}'$は

$$\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})=\frac{\Phi}{c}\vec{A}'(\vec{r})$$

$$=\frac{e\Phi}{2\pi c}\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\alpha\hbar\vec{\nabla}\varphi \tag{1.3}$$

ただし，$\alpha\equiv-\dfrac{e\Phi}{2\pi\hbar c}$，$\varphi\equiv\tan^{-1}(y/x)$. (1.4)

Vは，e，Φ間に働く適当なポテンシャルである。このとき，total mechanical momentum $m\dot{\vec{r}}+m'\dot{\vec{r}}'$はtotal canonical momentum $\vec{p}+\vec{p}'$と一致して保存し，他方total mechanical angular momentumは

$$J=m(x\dot{y}-y\dot{x})+m'(x'\dot{y}'-y'\dot{x}')=L+L'+\alpha\hbar \tag{1.5}$$

ただし，$L=xp_y-yp_x$，$L'=x'p'_y-y'p'_x$

である。e，Φそれぞれのcanonical角運量L，L′は波動関数の１価性から，（$\hbar$を単位として）整数固有値をとる故，αの値に応じて$J/\hbar$は半端な値となる。

いまe−Φ間に強い引力があって，これらが結合状態をつくりそこでの相対正準角運動量がゼロであったとしよう。このとき結合状態はスピンの値がαの粒子としてみえるはずである。このような粒子２個の

*) これは文献7)の模型に若干手を加えたものである。

系を考えよう。ただし結合状態の拡がりを無視し，それぞれの位置座標を $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$ とすれば，ハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2\mu}\{[\vec{p}_1-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)-\frac{\Phi}{c}\vec{A}'(\vec{r}_1-\vec{r}_2)]^2$$

$$+[\vec{p}_2-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)-\frac{\Phi}{c}\vec{A}'(\vec{r}_2-\vec{r}_1)]^2\}+U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$=\frac{1}{2\mu}\{(\vec{p}_1+2\alpha\hbar\vec{\nabla}_1\varphi_{12})^2+(\vec{p}_2+2\alpha\hbar\vec{\nabla}_2\varphi_{21})^2\}+U(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \tag{1.6}$$

ここで

$$\varphi_{12}=\tan^{-1}[(y_1-y_2)/(x_1-x_2)],$$
$$\varphi_{21}=\varphi_{12}+\pi \tag{1.7}$$

である。

e，Φ をともにボーズ粒子とすれば，(1.6) の系の波動関数は

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi(\vec{r}_2,\vec{r}_1) \tag{1.8}$$

に従う。また便宜上

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\big|_{\vec{r}_1=\vec{r}_2}=0 \tag{1.9}$$

を仮定しよう。このとき形式的に

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\to\psi'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\equiv e^{2i\alpha\varphi_{12}}\psi(r_1,r_2),$$
$$H\to H'\equiv e^{2i\alpha\varphi_{12}}He^{-2i\alpha\varphi_{12}} \tag{1.10}$$

なる変換を行なってみると，直ちに

$$H'=\frac{1}{2\mu}(\vec{p}_1^{\,2}+\vec{p}_2^{\,2})+U(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \tag{1.11}$$

となって，ハミルトニアンからは長距離力が消去される。ただし $2\alpha\neq$整数の場合は，ψ'は $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$ の1価関数ではないので，そこでは ψ'に波動関数としての意味をもたせることはできない。しかしこの点に目をつぶると (1.7)，(1.8) より

$$\psi'(\vec{r}_2,\vec{r}_1)=e^{2i\alpha\pi}\psi'(\vec{r}_1,\vec{r}_2), \tag{1.12}$$

つまり，長距離力を消去した所でみると表2の結果になる。

$2\alpha=$整数は3次元でのスピンと統計につながる常識的な結果であるが，$2\alpha\neq$整数はフェルミ，ボーズ，パラ統計のいずれでもなく，いわばフェルミ・ボーズの中間の統計性を示すものとなる。

表2

スピン α	整数	半整数	otherwise
統計	ボーズ	フェルミ	fractional

この例ではfractional spinは長距離力とともに存在しており，そのためにボーズ統計からのずれが生じてfractional statisticsを導いている。現在解かれているfractional spin, fractional statisticsの模型はすべてこのような長距離力を伴なう。これは，fractional spinをもつ自由粒子は存在し得ないことを意味しているのかも知れない。以下ではそれについて考えてみよう。

Ⅱ

前節のはじめの(i)に述べた粒子像についてその可能なタイプをもれなく列挙するという作業は必ずしも容易でないので，以下では(ii)の粒子像，つまり空間2次元，時間1次元の世界での相対論的な自由粒子として，いかなるものが可能か，またそれらの満す統計は何かを調べることにする。それには，次の順序で考えればよい。*)

ここではいかなる粒子も，(2＋1)次元のPoincaré群のユニタリーな既約表現に属するはずであるから，まず

(a) この群のユニタリーな既約表現をすべて求めること。

ただし，このようにして得られた粒子の状態ベクトルの変換は相対論的共変性に従わないので，

(b) 時空点xを変数とする相対論的に共変な波動方程式の理論に(a)をかきかえること。

この波動方程式が相対論的な場の方程式を与える。つぎに第2量子化を行うために

(c) (a)における既約表現の独立なベースが調和振動子として振舞うことに着目し，それらを粒子の消滅，反粒子の生成演算子とみなし，またそれらのエルミート共役とともに，ボーズまたはフェルミ型の交換関係を設定すること。

このとき調和振動子の運動方程式を与えるハミルトニアンは正定値，また生成・消滅演算子の表現空間のノルムは正であることが仮定される。(a)における表現のベースである生成・消滅演算子は(b)の波動方程式に従う共変的な場の量と関係づけられているので，

(d) 交換関係および，ハミルトニアンを，共変的な場の量を用いてかきかえ，その結果がEinstein causalityおよび共変性を満すことを条件として，交換関係がフェルミ型かボーズ型かを決定すること。

このようにして矛盾のない場の交換関係が設定できたとき，consistentな粒子像が与えられることになる。なお，フェルミ（ボーズ）統計が可能な自由場の理論ではパラフェルミ（パラボーズ）統計を用いることはつねに可能である。また，相対論的な自由場に対しては，これ以外の統計は存在しないと考えられている。

さて，(a)～(d)のプロセスを実行するのは，(2＋1)次元であっても可成り大がかりな議論になる。特に

---

*) 文献8)では，この手順に従って(3＋1)次元でのスピンと統計が議論された。

(b) の共変形式を (a) の各既約表現に対して求めるのは，一般論がないために勘や目の子でやらねばならぬことがある。それらを適当に端折ってかくことは不可能なので，詳細は原論文[9]を見ていただくことにし，ここでは得られた結果を下にまとめておくことにしよう。

(a) に述べた既約表現は，エネルギー・運動量ベクトルを k_0, $\vec{k}$ とかくとき，次のようになる。

[Ⅰ] $k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2$ $(m > 0)$，スピン S (S ; 実数)，

[Ⅱ] $k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$， スピン S $\left(-\frac{1}{2} < S \leq \frac{1}{2}\right)$

[Ⅱ′] $k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$， スピン S，$\Xi \neq 0$，$\left(-\frac{1}{2} < S \leq \frac{1}{2}\right)$

この他に，[Ⅲ] $k_0 = \vec{k} = 0$，[Ⅳ] $k_0^2 - \vec{k}^2 = -m^2 (m > 0)$ なる性質をもつ既約表現があるが，これらは粒子像を与えないので，考察の対象となるのは上記の [Ⅰ], [Ⅱ], [Ⅱ′] の場合である。

ここで若干の remark をしておこう。[Ⅰ] の massive case では，スピンは任意の実数値が可能。[Ⅱ′] の Ξ は既約表現を指定するのに必要な S以外のもう一つの量子数で，これが 0 のときが [Ⅱ] にあたる。また [Ⅱ], [Ⅱ′] の massless case では spin が S と S + integer の表現は unitary equivalent であることが証明できるので， S を $(-1/2 < S \leq 1/2)$ に制限できる。例えば，(2+1) 次元では massless の scalar と vector field (ただし free) が同等なことは次のようにして容易にわかる。Klein-Gordon 方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) = 0 \tag{2.1}$$

は， $V^\mu \equiv \partial^\mu \varphi$ とすると

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu(x) = 0, \\ \partial^\mu V^\nu(x) = \partial^\nu V^\mu(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

と同等，さらに $F^{\mu\nu} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\lambda} V_\lambda$ とすると，これは Maxwell の方程式

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0, \\ \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu F^{\nu\lambda}(x) = 0, \\ F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x), \end{cases} \tag{2.4}$$

と同等となり，結局 (2.1), (2.3), (2.4) は見掛けは違うがすべて同一内容となる。

なお，[Ⅰ], [Ⅱ], [Ⅱ′] ではさらに $k_0 \gtrless 0$ が既約表現の指定に用いられるが，これらは一般に positive, negative frequency として一つの場の中に吸収される。

さて以上を出発点とし，前記の (b), (c), (d) を経て次の結論が導かれる。

[Ⅰ]: $k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2$

および

[Ⅱ], [Ⅱ′]: $k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$

表3

スピンS	整　　数	半　整　数	otherwise
統　　計	ボーズ パラボーズ	フェルミ, パラフェルミ	no solution

表4

<table>
<tr><td colspan="2">スピンS</td><td>整　　数</td><td>半　整　数</td><td>otherwise</td></tr>
<tr><td rowspan="2">統計</td><td>[Ⅱ]</td><td>ボーズ,
パラボーズ</td><td>フェルミ,
パラフェルミ</td><td>?</td></tr>
<tr><td>[Ⅱ′]</td><td>no solution</td><td>no solution</td><td>?</td></tr>
</table>

上の表で，？とあるのはcovariant wave equationをまだみつけることができないために（或いは存在しないのかも知れないが）判定ができないことによる。no solutionは，causalでcovariantな量子化が存在しない，つまり1体系の量子論は可能であっても，consistent な場の量子論が存在しないことを示す。また理由は長くなるので略すが，？の所はたとえcovariant wave equationがみつかったとしても，場の量子論としてはno solutionとなる可能性が濃い。

ともかく，有限質量でスピンが整数でも半整数でもない自由粒子の存在は許されないことになる。また，質量0の粒子ではスピンが整数または半整数であっても[Ⅱ′]に属する$\Xi \neq 0$の自由粒子は存在しない。

以上は，相対論をフルに用いて導いた結果であるが，最初に述べた(i)のタイプの粒子に対しても，（少くとも有限質量の場合には）相対論を用いることなしに，これの一般的証明を与えることができるのではないかと思っている。

References

1) R. Haag, Phys. Rev. **112** (1985) 669.
K. Nishijima, Phys. Rev. **111** (1958) 995.
W. Zimmermann, Nuovo Cim. **10** (1958) 597.

2) P. Ehrenfest and J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **37** (1931) 333.
R. J. Redmond and J. L. Uretsky, Ann. Phys. (N. Y.) **9** (1960) 106.

3) D. Finkelstein, J. Math. Phys. **7** (1966) 1218.
D. Finkelstein and J. Rubinstein, J. Math. Phys. **9** (1968) 1762.

4) M. Fierz, Helv. Phys. Acta, **12** (1939) 3.
W. Pauli, Phys. Rev. **58**, (1940) 716.

5) パラ統計については，例えばY. Ohnuki and S. Kamefuchi "Quantum Field Theory and Parastatistics", Univ. of Tokyo Press/ Springer Verlag (1982) 参照.

6) F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1144, idid. **49** (1982) 957.
F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2250.
7) D. P. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, Nucl. Phys. **B251** [FS13] (1985) 117.
8) 大貫義郎『ポアンカレ群と波動方程式』岩波書店(1976), English version (trans. by S. Kitakado and T. Sugiyama) World Scientific Pub. in press.
9) Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, to be published.

Phase Holonomy, Zero-Point Energy Cancellation and Supersymmetric Quantum Mechanics

阪大・ＲＣＮＰ　飯田 晋司
立命館大・理工　倉辻 比呂志

量子断熱位相(Berry phase 以下Γと記す)は量子力学の断熱定理に於いて見いだされた幾何学的性質を持つ位相因子である。時間スケールの異なる運動が互いに結合した系を考える。Γを含んだ断熱定理を用いて速い変数を消去すると遅い変数に対してΓを伴った量子力学を得る。我々はこの量子断熱位相を伴った量子力学に於いてΓがどのような役割を果たすかについて研究を行ってきた。[1)-2)] 研究会ではΓを伴った量子力学がその特殊な場合として超対称性を持つ量子力学[3)]を導く事を報告しました。

詳しくは ref.4) を御参照下さい。

References

1) H.Kuratsuji and S.Iida, Phys.Lett. A111(1985) 220; Prog.Theor.Phys. 74(1985) 439; Phys.Rev.Lett. 56(1986) 1003.
2) S.Iida and H.Kuratssuji, Phys.Lett. B184(1987) 242;
H.Kuratsuji and S.Iida, Phys.Rev. D37(1988) 441.
3) E.Witten, Nucl.Phys. B185(1981) 513.
4) S.Iida and H.Kuratsuji, Phys.Lett. B198(1987) 221.